第 2 节 函数的单调性与奇偶性（★★☆）

内容提要

本节主要归纳函数的单调性、奇偶性相关考题，涉及的考点较多，先进行梳理.

1．单调性的运算结论：若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 D 上具有单调性，则

①在区间 D 上，若 $a>0$，则 $af(x)$ 与 $f(x)$ 单调性相同；若 $a<0$，则 $af(x)$ 与 $f(x)$ 单调性相反.

②若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 单调性相同，则 $f(x)+g(x)$ 的单调性与它们也相同.

③ $f(x)>0$， $g(x)>0$，且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 单调性相同，则 $f(x)g(x)$ 的单调性与它们也相同.

2．复合函数的单调性判断准则：同增异减.

3．奇函数的性质：① $f(-x)=-f(x)$；②图象关于原点对称；若 $x=0$ 处有定义，则 $f(0)=0$.

4．偶函数的性质：①满足 $f(-x)=f(x)$；②图象关于 y 轴对称.

5．常见的几个奇函数

① $f(x)=\log_a\dfrac{m+x}{m-x}$；② $f(x)=\log_a\dfrac{m-x}{m+x}$；③ $f(x)=\log_a(\sqrt{m^2x^2+1}+mx)$；

④ $f(x)=\log_a(\sqrt{m^2x^2+1}-mx)$；⑤ $f(x)=a^x-a^{-x}$；⑥ $f(x)=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$.

6．奇偶性加减法结论：奇 ± 奇 = 奇；偶 ± 偶 = 偶；奇 ± 偶 = 非奇非偶.

7．奇偶性乘除法结论：

①奇 × 奇 = 偶；奇 × 偶 = 奇；偶 × 偶 = 偶；②奇 ÷ 奇 = 偶；奇 ÷ 偶 = 奇；偶 ÷ 偶 = 偶.

8．无论 $y=f(x)$ 是什么函数，函数 $y=f(|x|)$ 和 $y=f(-|x|)$ 都是偶函数.

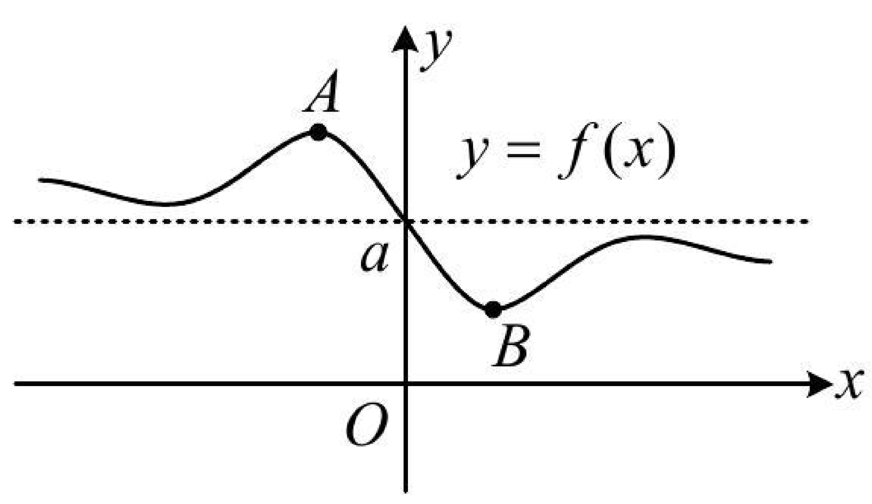
9．若 $y=f(x)$ 是奇函数或偶函数，则函数 $y=|f(x)|$ 是偶函数.

10．多项式函数 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 的奇偶性：

①当且仅当 $a_0=a_2=a_4=\cdots=0$ 时， $f(x)$ 为奇函数；

②当且仅当 $a_1=a_3=a_5=\cdots=0$ 时， $f(x)$ 为偶函数.

11．奇函数+常数小结论：若 $g(x)$ 为奇函数，则 $g(-x)+g(x)=0$ 对定义域内的任意实数 x 恒成立，那么设 $f(x)=g(x)+a$，则 $f(-x)+f(x)=g(-x)+a+g(x)+a=2a$；特别地，如图，因为 $g(x)$ 的图象关于原点对称，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,a)$ 对称，它必在关于 $(0,a)$ 对称的两个点处取得最大值和最小值，所以 $f(x)_{\max}+f(x)_{\min}=2a$.



12．函数值不等式的解法：题干给出函数 $f(x)$ 的解析式或 $f(x)$ 满足的一些性质，让我们求解像 $f(2x-1)<f(x^2)$ 这样的不等式，这类题有两个常用解法：①画草图，由图解不等式；②利用单调性，转化

为自变量的不等式来解.

13．本节会多次用到指数、对数的一些运算性质，先复习一下：

①指数的运算性质：$a^r\cdot a^s=a^{r+s}$；$(a^r)^s=a^{rs}$；$(ab)^r=a^rb^r$.

②对数的运算性质：$\log_a M+\log_a N=\log_a(MN)$；$\log_a M-\log_a N=\log_a\dfrac{M}{N}$；

$\log_a M^n=n\log_a M$；$\log_{a^m}b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$；$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$；$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$；$a^{\log_a N}=N$.

典型例题

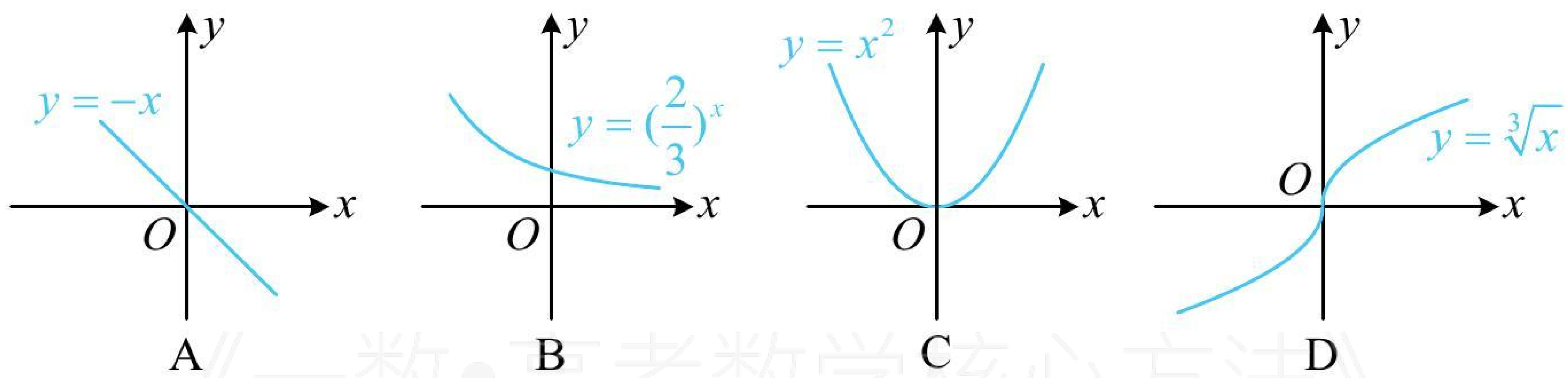
类型Ⅰ：单调性奇偶性判断小题

【例1】（2021·新课标Ⅱ卷）下列函数中是增函数的是（　　）

（A）$f(x)=-x$　（B）$f(x)=(\dfrac{2}{3})^x$　（C）$f(x)=x^2$　（D）$f(x)=\sqrt[3]{x}$

解析：给的都是简单函数，想象其图象即可判断单调性，如图，只有$f(x)=\sqrt[3]{x}$为增函数，故选D.

答案：D



【例2】（多选）下列函数中是奇函数的是（　　）

（A）$f(x)=\ln(e^{2x}+1)-x$　（B）$f(x)=2^x-2^{-x}$　（C）$f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$　（D）$f(x)=\begin{cases}x-1,x>0\\x+1,x<0\end{cases}$

解析：A项，$f(-x)=\ln(e^{-2x}+1)+x=\ln(\dfrac{1}{e^{2x}}+1)+x=\ln\dfrac{1+e^{2x}}{e^{2x}}+x=\ln(1+e^{2x})-\ln e^{2x}+x$

$=\ln(1+e^{2x})-2x+x=\ln(1+e^{2x})-x=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数，故A项错误；

B项，$f(-x)=2^{-x}-2^x=-(2^x-2^{-x})=-f(x)$，所以$f(x)$为奇函数，故B项正确；

C项，由$\dfrac{x+1}{x-1}>0$可得$(x+1)(x-1)>0$，解得：$x<-1$或$x>1$，定义域关于原点对称，

又$f(-x)=\ln\dfrac{-x+1}{-x-1}=\ln\dfrac{x-1}{x+1}=\ln(\dfrac{x+1}{x-1})^{-1}=-\ln\dfrac{x+1}{x-1}=-f(x)$，所以$f(x)$为奇函数，故C项正确；

D项，$f(x)$为分段函数，若用定义判断奇偶性，则需分段讨论，

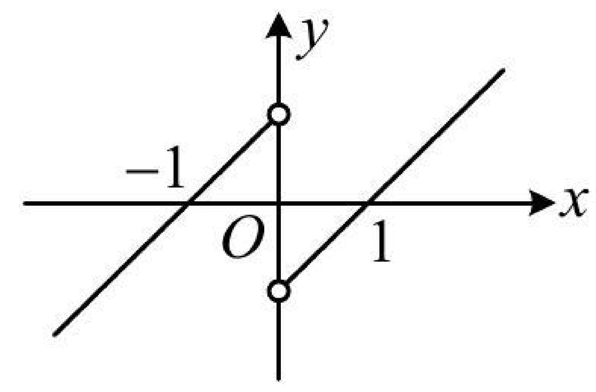
当$x>0$时，$-x<0$，将它们代入解析式得$f(x)=x-1$，$f(-x)=-x+1$，满足$f(-x)=-f(x)$，

当$x<0$时，$-x>0$，将它们代入解析式得$f(x)=x+1$，$f(-x)=-x-1$，也满足$f(-x)=-f(x)$，

所以对定义域内的任意实数x，都有$f(-x)=-f(x)$，从而$f(x)$为奇函数，故D项正确；

另外，也可通过画图来判断此选项，$f(x)$的大致图象如图，该图象关于原点对称，故$f(x)$为奇函数.

答案：BCD



【变式】（2020·新课标Ⅱ卷）设函数 $f(x)=\ln|2x+1|-\ln|2x-1|$，则 $f(x)$（　　）

（A）是偶函数，且在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 单调递增　　（B）是奇函数，且在 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 单调递减

（C）是偶函数，且在 $(-\infty,-\frac{1}{2})$ 单调递增　　（D）是奇函数，且在 $(-\infty,-\frac{1}{2})$ 单调递减

解法 1：先判断奇偶性，可将解析式合并，用定义判断，由题意，$f(x)=\ln|2x+1|-\ln|2x-1|=\ln\left|\frac{2x+1}{2x-1}\right|$ ①，

所以 $f(-x)=\ln\left|\frac{-2x+1}{-2x-1}\right|=\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|=\ln\left|\frac{2x+1}{2x-1}\right|^{-1}=-\ln\left|\frac{2x+1}{2x-1}\right|=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数，排除选项 A、C；

再判断单调性，B、D 两个选项判断一个即可，不妨看选项 B，可先结合 x 的范围将解析式化简，

当 $x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 时，$\frac{2x+1}{2x-1}<0$，结合①可得 $f(x)=\ln(-\frac{2x+1}{2x-1})=\ln(-\frac{2x-1+2}{2x-1})=\ln(-1-\frac{2}{2x-1})$，

此函数由 $y=\ln t$ 和 $t=-1-\frac{2}{2x-1}$ 复合而成，可用同增异减准则判断其单调性，

当 $x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 时，$t=-1-\frac{2}{2x-1}$ 单调递增，$y=\ln t$ 单调递增，所以 $f(x)$ 单调递增，故 B 项错误，选 D.

解法 2：也可取特值快速得到 $f(x)$ 的奇偶性，由题意，$f(-1)=-\ln 3$，$f(1)=\ln 3$，所以 $f(-1)=-f(1)$，故 $f(x)$ 只可能为奇函数，排除选项 A、C，单调性的判断方法同解法 1.

答案：D

类型Ⅱ：根据奇偶性求参数的值

【例 3】若函数 $f(x)=\log_2(16^x+1)-ax$ 是偶函数，则 $\log_a 2=$______.

解法 1：偶函数抓住 $f(-x)=f(x)$ 来分析即可，由题意，$f(-x)=f(x)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

所以 $\log_2(16^{-x}+1)+ax=\log_2(16^x+1)-ax$，此式要进一步变形，可将同类型的项合并，

所以 $2ax=\log_2(16^x+1)-\log_2(16^{-x}+1)=\log_2\frac{16^x+1}{16^{-x}+1}=\log_2\frac{(16^x+1)16^x}{1+16^x}=\log_2 16^x=\log_2(2^4)^x=\log_2 2^{4x}=4x$，

上式要对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，只能 $a=2$，所以 $\log_a 2=\log_2 2=1$.

解法 2：根据奇偶性求参，也可考虑通过取特值来快速求解，

因为 $f(x)$ 为偶函数，且定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $f(-1)=f(1)$，故 $\log_2(16^{-1}+1)+a=\log_2(16^1+1)-a$，

所以 $\log_2\frac{17}{16}+a=\log_2 17-a$，故 $a=\frac{1}{2}\times(\log_2 17-\log_2\frac{17}{16})=\frac{1}{2}\times[\log_2 17-(\log_2 17-\log_2 16)]=\frac{1}{2}\log_2 16=2$，

所以 $\log_a 2=1$.

答案：1

【变式 1】设函数 $f(x)=x^2(e^x+ae^{-x})(x\in\mathbf{R})$ 是奇函数，则实数 $a=$_____.

解法 1：根据奇偶性求参，用定义是通法，因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，

从而 $(-x)^2(e^{-x}+ae^x)=-x^2(e^x+ae^{-x})$，故 $x^2(e^{-x}+ae^x)+x^2(e^x+ae^{-x})=0$，

x^2 不恒为 0，将其约去可得 $e^{-x}+ae^x+e^x+ae^{-x}=0$，整理得：$(a+1)e^x+(a+1)e^{-x}=0$，

所以 $(a+1)(e^x+e^{-x})=0$，因为 $e^x+e^{-x}>0$，所以 $a+1=0$，解得：$a=-1$.

解法 2：观察发现 x^2 是偶函数，故也可只考虑后半部分，用结论快速求得 a 的值，

因为 $f(x)$ 是奇函数，且 $y=x^2$ 是偶函数，所以 $y=e^x+ae^{-x}$ 是奇函数，

在内容提要第 5 点中，我们归纳了形如 $y=a^x-a^{-x}$ 的函数是奇函数，与 $y=e^x+ae^{-x}$ 对比可得 $a=-1$.

答案：-1

【变式 2】（2022·全国乙卷）若 $f(x)=\ln\left|a+\frac{1}{1-x}\right|+b$ 是奇函数，则 $a=$_____，$b=$_____.

解法 1：$f(x)$ 的解析式较复杂，不易发现该用奇偶性的哪个结论来求参，故考虑用定义处理，

由题意，$f(-x)+f(x)=\ln\left|a+\frac{1}{1+x}\right|+\ln\left|a+\frac{1}{1-x}\right|+2b=\ln\left|a^2+\frac{a}{1-x}+\frac{a}{1+x}+\frac{1}{1-x^2}\right|+2b=\ln\left|a^2+\frac{2a+1}{1-x^2}\right|+2b=0$，

注意到上式需对定义域内所有的 x 恒成立，所以 $a^2+\frac{2a+1}{1-x^2}$ 必定不随 x 的变化而改变，

所以 $\begin{cases}2a+1=0\\ \ln|a^2|+2b=0\end{cases}$，解得：$a=-\frac{1}{2}$，$b=\ln 2$.

解法 2：涉及奇偶性，不妨先考虑定义域，要使 $f(x)$ 有定义，则 $\begin{cases}1-x\neq 0 & ①\\ a+\frac{1}{1-x}\neq 0 & ②\end{cases}$，由①可得 $x\neq 1$，

奇函数的定义域关于原点对称，故 -1 必定也不在 $f(x)$ 的定义域内，于是由②解出的必为 $x\neq -1$，

所以 $a+\frac{1}{1-(-1)}=0$，解得：$a=-\frac{1}{2}$，此时 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$，

所以 0 在 $f(x)$ 的定义域内，从而 $f(0)=\ln\frac{1}{2}+b=-\ln 2+b=0$，故 $b=\ln 2$.

答案：$-\frac{1}{2}$，$\ln 2$

【总结】根据奇偶性求参，定义是基本方法，但有的题目需要较强的计算能力才能顺利求解，若熟悉奇偶性的相关结论和一些常见的奇函数、偶函数，也可考虑用它们来快速求出参数的值.

类型III：奇函数+常数结论的应用

【例 4】已知 $g(x)$ 为奇函数，$f(x)=g(x)+1$，且 $f(-2)=3$，则 $f(2)=$_____.

解析：由题意，$f(-x)+f(x)=g(-x)+1+g(x)+1=2$，所以 $f(-2)+f(2)=2$，故 $f(2)=2-f(-2)=2-3=-1$.

答案：-1

【反思】当涉及“$f(x)=$奇函数 $g(x)+$常数 a”时，要想到内容提要第 11 点的结论，$f(-x)+f(x)=2a$，且若 $f(x)$ 存在最值，则 $f(x)_{\max}+f(x)_{\min}=2a$.

【变式 1】（2018·新课标III卷）已知函数 $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)+1$，$f(a)=4$，则 $f(-a)=$_____.

解析：若能识别出 $y=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$ 这个部分是奇函数，那就好办了，下面先证明一下，

设 $g(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)(x\in\mathbf{R})$，则 $g(-x)+g(x)=\ln(\sqrt{1+(-x)^2}+x)+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$

$=\ln[(\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x)]=\ln(1+x^2-x^2)=\ln 1=0$，所以 $g(x)$ 为奇函数，

而 $f(x)=g(x)+1$，所以 $f(a)+f(-a)=g(a)+1+g(-a)+1=2$，故 $f(-a)=2-f(a)=-2$.

答案：-2

【反思】①本题的“奇函数+常数”结构隐含在解析式中；② $y=\log_a(\sqrt{m^2x^2+1}\pm mx)$ 是较常见的奇函数.

【变式 2】已知函数 $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)+ax+4(a\in\mathbf{R})$，$f(\ln(\log_2 e))=5$，则 $f(\ln(\ln 2))=$（　　）

（A）-5　（B）-1　（C）3　（D）4

解析：只要发现 $\ln(\sqrt{1+x^2}+x)+ax$ 为奇函数，以及 $\ln(\log_2 e)$ 和 $\ln(\ln 2)$ 相反，剩下的和变式 1 一样，

设 $g(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)+ax$，则 $g(-x)+g(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)-ax+\ln(\sqrt{1+x^2}+x)+ax$

$=\ln[(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)]=\ln(1+x^2-x^2)=0$，所以 $g(x)$ 是奇函数，

又 $f(x)=g(x)+4$，所以 $f(x)+f(-x)=g(x)+4+g(-x)+4=8$，

因为 $\ln(\log_2 e)=\ln(\dfrac{1}{\ln 2})=\ln(\ln 2)^{-1}=-\ln(\ln 2)$，

所以 $f(\ln(\log_2 e))+f(\ln(\ln 2))=f(-\ln(\ln 2))+f(\ln(\ln 2))=8$，故 $f(\ln(\ln 2))=8-f(\ln(\log_2 e))=3$.

答案：C

【变式 3】已知函数 $f(x)=\dfrac{|x|-\sin x+1}{|x|+1}$ 的最大值为 M，最小值为 m，则 $M+m=$_____.

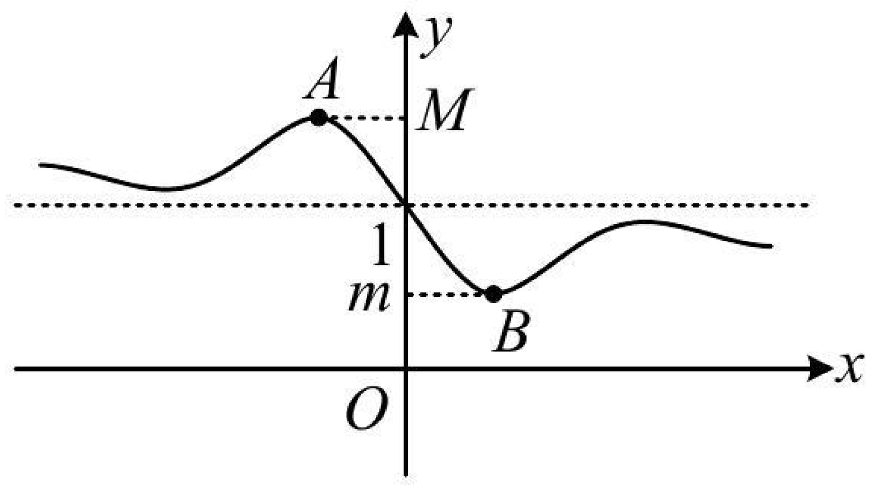
解析：观察可得 $f(x)$ 的最值不好求，所以不去求最值，$f(x)$ 的分子分母有相同的部分，先拆项，

化为 $f(x)=1-\dfrac{\sin x}{|x|+1}$，其中 $y=-\dfrac{\sin x}{|x|+1}$ 这个部分为奇函数，从而可以利用对称性来求 $M+m$，

$f(x)=\dfrac{|x|-\sin x+1}{|x|+1}=1-\dfrac{\sin x}{|x|+1}$，因为 $y=-\dfrac{\sin x}{|x|+1}$ 是奇函数，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,1)$ 对称，

故 $f(x)$ 的图象上的最大值和最小值的两个点 A 和 B 也关于 $(0,1)$ 对称（如图），由图可知 $M+m=2$.

答案：2



【反思】若 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)=f(x)+a$，且 $g(x)$ 存在最大值 M 和最小值 m，则 $M+m=2a$.

类型Ⅳ：函数值不等式的解法

【例 5】定义在 $[-2,2]$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0(x_1\neq x_2)$，且 $f(x)>f(2x-1)$，则实数 x 的取值范围为（　　）

（A）$(-\infty,1)$　（B）$[-\frac{1}{2},1]$　（C）$[-\frac{1}{2},1)$　（D）$[-1,1)$

解析：由题意，$f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上↗，结合定义域，$f(x)>f(2x-1)\Leftrightarrow\begin{cases}-2\le x\le 2\\-2\le 2x-1\le 2\\x>2x-1\end{cases}$，解得：$-\frac{1}{2}\le x<1$.

答案：C

【变式 1】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3,x\le 1\\\ln(x^2-2x+4),x>1\end{cases}$，若 $f(x)>f(2x-1)$，则实数 x 的取值范围为（　　）

（A）$(-\infty,1)$　（B）$(-\infty,-1)$　（C）$(-1,1)$　（D）$(-1,+\infty)$

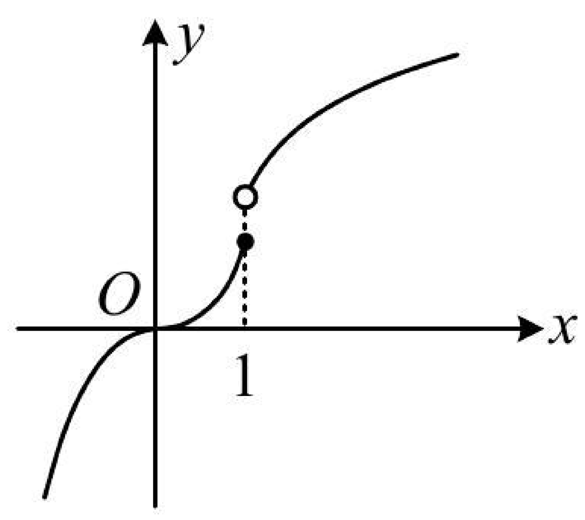
解析：本题没有直接给单调性，但给了分段形式的解析式，若将 $f(x)$ 和 $f(2x-1)$ 代入解析式，则需讨论的情况较多，所以试试判断单调性，看能否用单调性来解不等式，

由题意，$f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上↗，在 $(1,+\infty)$ 上，$u=x^2-2x+4$ 和 $y=\ln u$ 都↗，所以 $f(x)=\ln(x^2-2x+4)$ 也↗，

在间断点 $x=1$ 处，左侧函数值 $f(1)=1$，右侧极限值 $\lim_{x\to 1^+}f(x)=\ln 3>1$，

所以 $f(x)$ 的大致图象如图，由图可知 $f(x)$ 在 **R** 上↗，所以 $f(x)>f(2x-1)\Leftrightarrow x>2x-1\Leftrightarrow x<1$.

答案：A



【反思】无论题干是否给出 $f(x)$ 解析式，在求解与 $f(x)$ 有关的函数值不等式时，都应首先考虑单调性，这是比较优越的解法.

【变式 2】已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x, x>1\\ 0, 0\le x\le 1\\ x, x<0\end{cases}$，若 $f(2a-1)<f(a)$，则实数 a 的取值范围是_____.

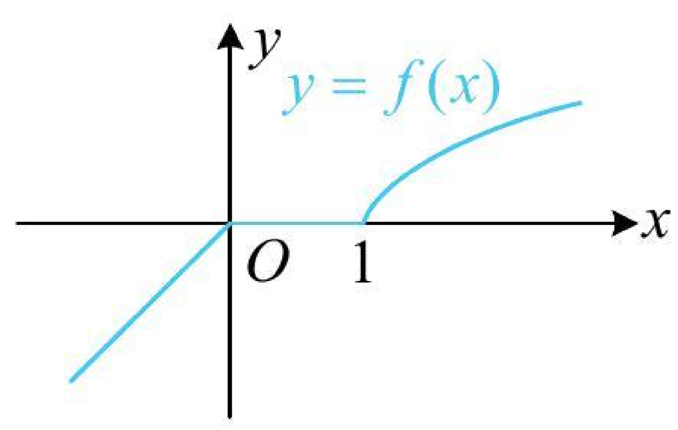
解析：涉及分段函数的函数值不等式，先画图看单调性，如图，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不严格↗，$f(2a-1)<f(a)$ 不再等价于 $2a-1<a$，应在此基础上补充 $2a-1$ 和 a 不同时位于中间水平的那段，否则 $f(2a-1)=f(a)$，

因为 $f(2a-1)<f(a)$，所以首先应有 $2a-1<a$，解得：$a<1$ ①，另一方面，$2a-1$ 和 a 不同时在 $[0,1]$ 上，若由此直接求 a 的范围，则需讨论较多情况，而它的反面只有一种情况，故可先考虑反面，再取补集，

当 $2a-1$ 和 a 同时在 $[0,1]$ 上时，$\begin{cases}0\le 2a-1\le 1\\ 0\le a\le 1\end{cases}$，解得：$\frac{1}{2}\le a\le 1$，

所以当 $2a-1$ 和 a 不同时在 $[0,1]$ 上时，$a<\frac{1}{2}$ 或 $a>1$，结合①可得 $a<\frac{1}{2}$.

答案：$(-\infty,\frac{1}{2})$



【反思】相较于上一题，若分段函数不严格单调，在单调性上再补充自变量不同时位于水平的那段即可.

【变式 3】已知函数 $f(x)=x^3-2x+\mathrm{e}^x-\frac{1}{\mathrm{e}^x}$，若 $f(x)>f(2x-1)$，则实数 x 的取值范围为_____.

解析：看到 $f(x)>f(2x-1)$，考虑用 $f(x)$ 的单调性来解，此处解析式较复杂，需求导判断单调性，

由题意，$f'(x)=3x^2-2+\mathrm{e}^x+\frac{1}{\mathrm{e}^x}\ge 3x^2-2+2\sqrt{\mathrm{e}^x\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^x}}=3x^2\ge 0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，

从而 $f(x)>f(2x-1)$ 等价于 $x>2x-1$，解得：$x<1$.

答案：$(-\infty,1)$

【例 6】已知函数 $f(x)=x^3-2x+\mathrm{e}^x-\frac{1}{\mathrm{e}^x}$，若 $f(x)+f(2x-1)>0$，则实数 x 的取值范围为_____.

解析：$f(x)+f(2x-1)>0\Leftrightarrow f(x)>-f(2x-1)$，与上题相比，右侧有个负号，不能直接用单调性求解，怎么办呢？观察发现 $f(x)$ 为奇函数，所以负号可以拿到括号里面，下面先证明 $f(x)$ 为奇函数，

由题意，$f(-x)=(-x)^3-2(-x)+\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{\mathrm{e}^{-x}}=-x^3+2x+\frac{1}{\mathrm{e}^x}-\mathrm{e}^x=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 是奇函数，从而 $f(x)>-f(2x-1)\Leftrightarrow f(x)>f(1-2x)$，

因为 $f'(x)=3x^2-2+\mathrm{e}^x+\frac{1}{\mathrm{e}^x}\ge 3x^2-2+2\sqrt{\mathrm{e}^x\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^x}}=3x^2\ge 0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，

故 $f(x)>f(1-2x)$ 等价于 $x>1-2x$，解得：$x>\frac{1}{3}$.

答案：$(\frac{1}{3},+\infty)$

【总结】当我们看到 $f(\cdots)+f(\cdots)>0$ 这种结构的函数值不等式时，一定要看看 $f(x)$ 是否为奇函数，若是，则可以移项结合奇函数转化为 $f(\cdots)>f(\cdots)$ 这种结构，再借助单调性来求解.

【例 7】函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，若 $f(x)>f(2x-1)$，则实数 x 的取值范围为（　　）

（A）$(\frac{1}{3},1)$　　（B）$(-1,1)$　　（C）$(-\infty,1)$　　（D）$(1,+\infty)$

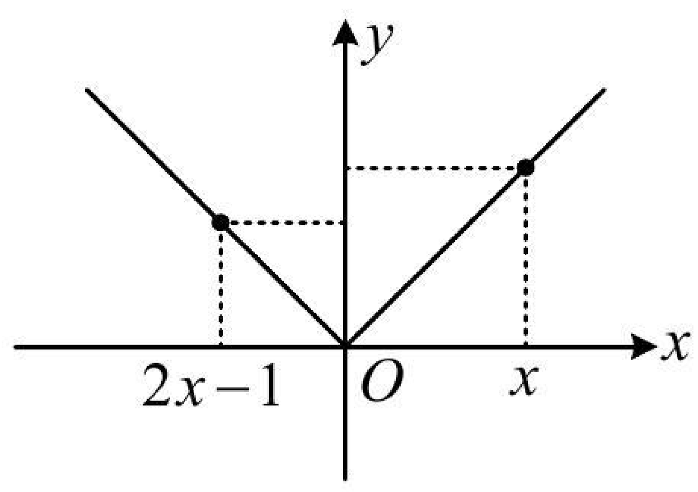
解析：给了偶函数在 y 轴一侧的单调性，可画出草图，并用来分析不等式 $f(x)>f(2x-1)$，

由题意，$f(x)$ 的草图如图，可以看到，图象上离 y 轴越远的点，对应的函数值越大，

观察不等式 $f(x)>f(2x-1)$，其中 x 与 y 轴的距离即为 $|x-0|$，$2x-1$ 与 y 轴的距离即为 $|2x-1-0|$，

所以 $f(x)>f(2x-1)\Leftrightarrow|x|>|2x-1|$，故 $x^2>(2x-1)^2$，解得：$\frac{1}{3}<x<1$.

答案：A



【总结】当我们看到 $f(\cdots)>f(\cdots)$ 这种结构的函数值不等式时，若发现 $f(x)$ 为偶函数，则常画出 $f(x)$ 的草图，将函数值的大小关系转化为图象上对应的点离 y 轴距离的大小关系来求解.

【变式】设函数 $f(x)=\dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{|x-3|-3}$，则使得 $f(\log_2 x)>f(-1)$ 成立的 x 的取值范围是_____.

解析：$f(x)$ 的解析式较复杂，考虑从研究 $f(x)$ 的性质入手，奇偶性、单调性不易看出，故先求定义域，

分子应满足 $4-x^2\ge 0$，故 $-2\le x\le 2$，此时分母可化为 $3-x-3=-x$，所以 $x\ne 0$，

从而 $f(x)$ 的定义域为 $[-2,0)\cup(0,2]$，且 $f(x)=\dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{-x}=-\sqrt{4-x^2}$，

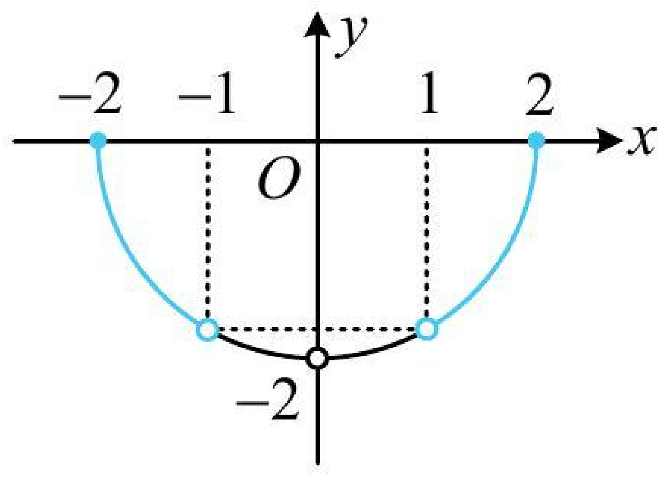
到此 $f(x)$ 的解析式已被化简，可通过画图判断单调性、奇偶性，并用于解所给的不等式，

$y=-\sqrt{4-x^2}\Rightarrow y^2=4-x^2\Rightarrow x^2+y^2=4(y\le 0)$，所以函数 $f(x)$ 的草图如图，

可以看到，图象上离 y 轴越远的点，函数值越大，故 $f(\log_2 x)>f(-1)$ 等价于 $\log_2 x$ 在蓝色的两段，

所以 $1<\log_2 x\le 2$ 或 $-2\le\log_2 x<-1$，解得：$\frac{1}{4}\le x<\frac{1}{2}$ 或 $2<x\le 4$.

答案：$[\frac{1}{4},\frac{1}{2})\cup(2,4]$



强化训练

类型Ⅰ：单调性、奇偶性判断与求参

1．（2020·新课标Ⅱ卷·★）设函数 $f(x)=x^3-\frac{1}{x^3}$，则 $f(x)$（　　）

（A）是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递增　　（B）是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递减

（C）是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递增　　（D）是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递减

2．（2023·新高考Ⅰ卷·★★）设函数 $f(x)=2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0,1)$ 单调递减，则 a 的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,-2]$　　（B）$[-2,0)$　　（C）$(0,2]$　　（D）$[2,+\infty)$

3．（2023·韶关模拟·★★）已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x\ge 0$ 时，$f(x)=x^2+(a-1)x+a+1$，则 $f(-3)=$______.

4．（2022·河南模拟·★★）若函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+a}-x)$ 为奇函数，则 $a=$（　　）

（A）$\frac{1}{4}$　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）1　　（D）2

5．（2023·全国乙卷·★★）已知 $f(x)=\frac{xe^x}{e^{ax}-1}$ 是偶函数，则 $a=$（　　）

（A）-2　　（B）-1　　（C）1　　（D）2

类型Ⅱ：奇函数+常数结论的应用

6．（★★）设 $f(x)$ 为定义在 **R** 上的奇函数，$g(x)=f(x)-1$，$g(1)=-2$，则 $g(-1)=$_____.

7．（2022・乐山模拟・★★）设 $f(x)=|x|\sin x+1$，若 $f(a)=2$，则 $f(-a)=$_____.

8．（★★★）若函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2+\sin x}{x^2+1}$ 的最大值为 M，最小值为 m，则 $M+m=$_____.

类型Ⅲ：函数值不等式的解法

9．（2017・新课标Ⅰ卷・★★）奇函数 $f(x)$ 在 **R** 上单调递减，若 $f(1)=-1$，则满足 $-1\le f(x-2)\le 1$ 的 x 的取值范围是（　　）

（A）$[-2,2]$　（B）$[-1,1]$　（C）$[0,4]$　（D）$[1,3]$

10．（2022・湖北五校联考・★★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x,x\le 0\\x^2+2,x>0\end{cases}$，若 $f(|x|)>f(x^2-2)$，则实数 x 的取值范围为_____.

11．（2022・漳州模拟・★★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-1,x>0\\-1,x\le 0\end{cases}$，若 $f(3a-2)<f(a)$，则 a 的取值范围为_____.

12．（★★）已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，则满足 $f(x^2-1)<f(3)$ 的 x 的取值范围是_____.

13．（★★★）设 $f(x)=\ln(1+|x|)-\frac{1}{1+x^2}$，则使 $f(x^2-x)>f(2x-2)$ 成立的 x 的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　（B）$(-\infty,-2)\cup(0,2)$　（C）$(-2,2)$　（D）$(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

14．（★★★）定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 在 $[-2,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(x-2)$ 是偶函数，则 $f(x+2)>f(x)$ 的解集是_____.

15．（2022・广东模拟・★★★）若定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，且 $f(2)=0$，则满足 $xf(x-1)\ge 0$ 的 x 的取值范围为（　　）

（A）$[-1,1]\cup[3,+\infty)$　（B）$[-3,-1]\cup[0,1]$　（C）$[-1,0]\cup[1,+\infty)$　（D）$[-1,0]\cup[1,3]$

16．（2022・盐城模拟・★★★）已知函数 $f(x)=e^x-e^{-x}+\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$，则不等式 $f(x)+f(2x-1)>0$ 的解集是（　　）

（A）$(1,+\infty)$　（B）$(\frac{1}{3},+\infty)$　（C）$(-\infty,\frac{1}{3})$　（D）$(-\infty,1)$

17．（★★★）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$，若 $f(\log_3 x)-f(\log_3 \frac{1}{x})\le 2f(1)$，则 x 的取值范围为（　　）

（A）$[\frac{1}{3},1]$　　（B）$[\frac{1}{3},3]$　　（C）$[\frac{1}{3},+\infty)$　　（D）$(0,3]$

18．（★★★）（多选）已知函数 $f(x)=x^{3}+x-\sin x$，实数 m，n 满足不等式 $f(2m-3n)+f(n-2)>0$，则（　　）

（A）$\mathrm{e}^{m}>\mathrm{e}^{n}$　　（B）$\frac{n}{m}>\frac{n+1}{m+1}$　　（C）$\ln(m-n)>0$　　（D）$m^{3}<n^{3}$